Главное управление образования мэрии города Новосибирска

Дворец творчества детей и учащихся молодежи «Юниор»

Открытый городской конкурс исследовательских проектов

Учащихся 5-8 классов

Направление: инженерный проект

«Фрактал – выдумка или реальность?»

Автор: Сосновская Дарья Алексеевна

Русинова Арина Николаевна

МБОУ Лицей №185, 6 класс

Октябрьский район г.Новосибирска

Консультант проекта: Глушкова Татьяна Александровна,

Учитель математики высшей квалификационной категории

МБОУ Лицея №185

Контактный телефон руководителя: 8-913-711-28-91

г.Новосибирск, 2016

Проект по теме «Фрактал – выдумка или реальность?»

Проблема.

В рамках строгих правил классической геометрии окружающий мир должен быть « параллелен и перпендикулярен», но великолепие причудливых форм окружающих нас объектов, не всегда поддаётся описанию с помощью существующих математических законов. Значит, должны быть и другие законы, дополняющие их.

Цель.

Собрать, изучить и представить информацию о фрактальной геометрии, её применении для описания объектов окружающего мира.

Задачи.

- Определить источники информации по теме «Фрактальная геометрия»,
- выбрать и изучить материалы о фракталах и об ученом, впервые описавшим их,
- установить различия между евклидовой и фрактальной геометрией,
- классифицировать фракталы с зависимости от степени самоподобия,
- рассмотреть объекты, обладающие фрактальными свойствами в природе,
- рассмотреть практическое применение фракталов в различных областях человеческой деятельности,
- оформить собранную информацию в виде презентации с сопутствующим информационным текстом.
- создать коллекцию фракталов с помощью компьютерной графики.
- создать макет микрорайона города Новосибирска, выполненный в форме фрактала.

Проектный продукт.

Презентация, макет микрорайона города Новосибирска, выполненный в форме фрактала. Данный макет выполнен по правилам симметрии, что создает комфорт и удобство городской среды.

Данная работа была представлена на НПК -2016 (школьный, районный и городской уровень), на городской выставке «Городские технологии» в экспоцентре, в Новосибирском планетарии на конкурсе «Делай науку».

План.

Введение.

С давних времен люди пытались понять строение Космоса. Они стремились найти законы Вселенной и формулы, описывающие эти законы. Со временем стало понятно, что Космос делится на две части: микрокосмос и макрокосмос.

Макрокосмос – это множество объектов Вселенной, которые по размерам сопоставимы с нашей планетой, Солнечной системой, галактикой или созвездиями. Микрокосмос, напротив, образуют все объекты, которые по размерам сопоставимы с человеком или меньше его. Человеку всегда было интересно то, что нельзя увидеть или предсказать, и это любопытство двигало его в дали макрокосмоса и в глубины микрокосмоса. Желание привести к единообразию микро и макрокосмос нашло отражение в появившемся около 50 лет назад новом разделе математики – фрактальной геометрии. Изучение хаоса и фракталов не просто новая область познания, которая объединяет математику, теоретическую физику, искусство и компьютерные технологии — это революция. Это открытие нового типа геометрии, той геометрии, которая описывает мир вокруг нас и которую можно увидеть не только в учебниках, но и в природе и везде в безграничной вселенной. Все элементы головоломки, известные еще Платону, Ципфу и Юлу, сошлись в руках Бенуа Мандельброта. Именно Мандельброт связал случайность и геометрию, и тем самым привел вопрос к логическому завершению. Фрактальная геометрия – это один из инструментов теории хаоса, используется для изучения феноменов, которые являются хаотическими только с точки зрения евклидовой геометрии и линейной математики.

О Бенуа Мандельброте.

Бенуа Мандельброт родился в 1924 году в Варшаве, в образованной и довольно обеспеченной еврейской семье, которая по обеим линиям происходила из Литвы. Отец был торговцем одеждой, а мать - медиком. Воспитателем и учителем стал дядя. Учил он ребенка своеобразно, никогда не заставлял запоминать ни таблицу умножения, ни алфавит. В итоге вычисления доставляли некоторые проблемы знаменитому математику. Однако дядя тренировал память мальчика и развивал у него независимое и творческое мышление. Бенуа проводил время, играя в шахматы, изучая географические карты и рассматривая широко открытыми глазами окружающий мир.

В 1936 году семья переехала в Париж. Там заботу об образовании молодого Мандельброта взял на себя младший брат отца, профессор математики и механики. В Коллеж де Франс Шолем Мандельброт. Благодаря ему, юный Бенуа рано понял, что математика – живая наука, а не собрание пыльных фолиантов. «Мое мышление почти полностью визуальное, я распознаю геометрические формы по очертаниям, а не по математическим формулам», говорил он. Мандельброт не раз отмечал, что свою геометрическую интуицию он развил в себе сам.

Приближающаяся война заставила семью переехать в бедную центральную Францию, в город Тюль. Там Бенуа учился нерегулярно, но у Мандельброта были книги, и он продолжал изучать математику « в одиночестве и странным образом». В 1944 он поступил в подготовительный класс при лицее в Лионе. Однажды получив от профессора математики алгебраическую задачу, Бенуа сказал: «Это точно такая же задача, как вот эта задача по геометрии. И как те другие задачи геометрические задачи». « И тогда проявился мой дар – для меня все было геометрическим», вспоминал он. Чуть далее Мандельброт добавляет, что овладей он навыками свободного манипулирования формулами, это могло бы повредить его геометрическому дару.

Талантливый абитуриент сумел скрыть слабое знание алгебры и анализа, применив к задачам геометрическое воображение и поступил в Высшую политехническую школу. Там было немало выдающихся математиков. В частности дифференциальную геометрию преподавал Гастон Жюлиа. В 1945 году Бенуа ознакомился с его 300 – страничной рукописью «Записка о приближении рациональных функций», но был вынужден оставить ее изучение. В 1947 году Мандельброт окончил школу. В следующем году получил степень магистра по аэронавтике в Калифорнийском Технологическом Институте. Вернувшись во Францию, он провел год в Военно-воздушных силах. В 1952 году в Парижском университете он защитил докторскую диссертацию, которая положила начало его междисциплинарным исследованиям. Обратившись вновь к рукописи Гастона Жюлиа в 1970 году, он вывел на передней план новую дисциплину – фрактальную геометрию. В 1975 в своей книге « Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность» он объяснил, что слово «фрактал» означает «ломать, разбивать». В 1982 году он публикует новую книгу « The Fractal Geometry of Nature» - «Фрактальная геометрия природы». Бенуа Мандельброт являлся сотрудником Исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM в Йорктаун- Хейтсе (штат Нью-Йорк). В 1987 году он стал профессором Йельского университета. Ему нравилось, что в традиции университета было: « сначала думать о людях», а потом уже о том, чем они занимаются. В своей работе каждый мог следовать туда, куда она его вела, отклонения и повороты согласовывать не требовалось.

Мандельброт умер в Кембридже 14 октября 2010 года.

Мандельброт не изобрел фракталы – они всегда существовали и «ждали», пока кто- то обратит на них внимание и раскроет их тайны.

Три вида геометрии.

В основе практически всей современной науки лежит математика, поэтому не зря степень развития науки или цивилизации оценивают по тому, насколько она «математична». Основным инструментом научного и технического прогресса во всех цивилизациях была **геометрия**, и в то же время она развивалась благодаря растущим потребностям науки и техники. Рассмотрим три вида геометрии, создателями которых являются Евклид, Лобачевский и Риман.

Евкли́д *или* Эвкли́д (ок. 300 г.до н. э.) — древнегреческий математик. Мировую известность приобрёл благодаря сочинению по основам математики «Начала». Основатель современной геометрии, преимущественно используемой в повседневной жизни. Со временем стало понятно, что геометрия Евклида является полностью приближением реальности, если речь идет об объектах, сопоставимых по масштабу с Землей, но на больших расстояниях все уже не столь очевидно. Геометрия Евклида реализуется на поверхностях с постоянной нулевой гауссовской кривизной.

Никола́й Ива́нович Лобаче́вский (20 ноября (1 декабря) 1792), Нижний Новгород — 12 (24) февраля 1856, Казань), русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Известный английский математик Уильям Клиффорд назвал Лобачевского «Коперником геометрии».

Евклидова аксиома о параллельных гласит:

- через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её.

В геометрии Лобачевского, вместо неё принимается следующая аксиома:

- через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

Геометрия Лобачевского - гиперболическая геометрия. Она находит применение при изучении сверхбольших (космических) пространств. Геометрия Лобачевского реализуется на поверхностях с постоянной гауссовской кривизной.

Георг Фридрих Бернхард Риман – немецкий математик 17 сентября 1826, Брезеленц, Ганновер — 20 июля 1866, Селаска, Италия. За свою короткую жизнь он преобразовал сразу несколько разделов математики. Геометрия Римана – эллиптическая геометрия. В ней прямая определяется двумя точками, плоскость - тремя, две плоскости пересекаются по прямой и т.д., но через данную точку нельзя провести к прямой ни одной параллельной прямой.

Геометрия Римана — реализуется на поверхностях с постоянной положительной гауссовской кривизной. Геометрия Римана не имеет практического использования в повседневной жизни, она носит лишь теоретический характер, но также является неотъемлемой частью как геометрии, так и математики в целом.

Если описывать Вселенную с помощью фигур, которые изучал Евклид, то выявится множество ограничений. Фигуры геометрии природы очень далеки от идеальных фигур евклидовой геометрии. Рассмотрим, в чем заключаются фундаментальные различия между геометрией Евклида и фрактальной геометрией.

Фундаментальные различия между геометрией Евклида и фрактальной геометрией	
Евклидова геометрия	**Фрактальная геометрия**
Классическая (насчитывает свыше 2000 лет)	Современная (насчитывает около 50 лет)
Целая размерность	Фрактальная размерность
Изучает объекты, созданные человеком	Изучает фигуры, созданные природой
Описывается формулами	Описывается рекурсивными алгоритмами (с множеством итераций)

Из истории открытия фракталов.

В начале 19 века шотландский ботаник Роберт Броун исследуя каплю жидкости, увидел следы мельчайших частиц, которые безостановочно совершали абсолютно хаотичные колебания. Современный микроскоп позволяет увидеть, что истинная траектория частицы намного сложнее наблюдаемой.

Броуновское движение стало одним из первых явлений природы, в котором прослеживаются признаки самоподобия в различном масштабе. То, что материя делится до бесконечности, утверждали еще Аристотель, Декарт и Лейбниц.

Греческий философ Анаксагор, живший в 5 веке до нашей эры, в своем труде о гомеомериях, утверждал, что в каждой частице, какой бы малой она не была «есть города, населенные людьми, обработанные поля, и светит солнце, луна и другие звезды, как у нас». В арабских источниках 650 года встречаются переведенные тексты Изумрудной скрижали (скрижаль – это доска или таблица с написанным на ней текстом), которую по легенде написал Гермес Трисмегист. Основной постулат её гласит: «То, что находится внизу, аналогично тому, что находится вверху». Этот принцип принят за аксиому последователями герметической философии, которые утверждали аналогию между микро и макромирами.

Итак, что это за цветные формы, которые мы видим повсюду вокруг? Говоря простым языком – это фракталы.

Фрактал (лат. *fractus* — дроблёный, сломанный, разбитый) — термин, означающий сложную геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия, то есть составленную из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В 1975 г. Мандельброт дал фракталам такое определение: Фракталы – это фигуры, которые являются результатом повторяющихся математических процессов, описываются недифференцируемыми функциями, обладают самоподобием в любом масштабе и имеют фрактальную размерность.

Фракталы естественным образом возникают при изучении нелинейных динамических систем. Наиболее изучен случай, когда динамическая система задаётся итерациями (повторениями) многочлена или голоморфной функции комплексной переменной на плоскости. Первые исследования в этой области относятся к началу 20 века и связаны с именами Фату и Жюлиа.

Пусть $F(z)$ — многочлен, z_0 — комплексное число. Рассмотрим следующую последовательность: z_0, $z_1=F(z_0)$, $z_2=F(F(z_0)) = F(z_1)$, $z_3=F(F(F(z_0)))=F(z_2)$, …
Нас интересует поведение этой последовательности при стремлении n к бесконечности. Эта последовательность может:

- стремиться к бесконечности,
- стремиться к конечному пределу,
- демонстрировать в пределе циклическое поведение, например: z_1, z_2, z_3, z_1, z_2, z_3, …
- вести себя хаотично, то есть не демонстрировать ни один из трёх упомянутых типов поведения.

В связи с этим различают геометрические, алгебраические и стохастические виды фракталов.

Классификация фракталов в зависимости от степени самоподобия

1. **Самоповторяющиеся**

Эта категория накладывает наиболее строгие ограничения, так как необходимо, чтобы фрактал не изменялся в зависимости от масштаба наблюдений. К этой группе относятся : канторово множество, треугольник Серпинского, кривая Пеано, снежинка Коха, кривая дракона, губка Менгера и т.д.

2. **Линейные**

Это фракталы, которые строятся с помощью аффинных преобразований. Они содержат копии всей фигуры целиком, но видоизмененные с помощью линейных функций, как, например, лист папоротника Барнсли.

3. **Самоподобные**

Фракталы этого типа содержат уменьшенные копии целиком, видоизмененные с помощью нелинейных функций, как, например, множество Жюлиа.

Расскажем о возникновении двух множеств. Первое – это множество Жюлиа. Французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату изучая комплексные числа и их свойства, вывели формулу $z_{n+1} = z_n^2 + C$, где Z – комплексное число, C – комплексная константа. Суть формулы проста: нужно взять число, умножить его само на себя, сложить с константой C и повторять эти действия над каждым полученным результатом снова и снова.

В 1906 г. Фату доказал, что если применить эту операцию ко всем точкам комплексной плоскости, то большинство полученных орбит будут заканчиваться на бесконечности, за исключением четко определенного множества точек, внутренняя часть которого сегодня известна как множество Фату. Эти точки можно назвать «пленниками», а остальные точки

– «изгнанниками». Точки на границе между ними, «охранники», образуют множество Жюлиа.

В зависимости от значения константы С, множества Жюлиа бывают двух классов: те, которые образованы одной фигурой (такие множества называют связными), и те, что разделены на бесконечное множество отдельных точек вблизи друг друга (такие множества называют несвязными).

4. Квазисамоподобные.

Фракталы этой группы более или менее идентичны в различном масштабе. Такие фракталы содержат уменьшенные и деформированные копии всей фигуры целиком Как правило, к этому типу относятся фракталы, определенные помощью рекурсивных процедур, как например, множество Мандельброта или фрактал Ляпунова.

Классическим образцом фрактала является множество Мандельброта. Оно обладает многими примечательными свойствами. При его построении сложение и умножение придется выполнить несколько триллионов раз. Поэтому оно было открыто только с появлением современных компьютеров. Изучив значения константы С и изобразив полученный набор значений С на комплексной плоскости, Мандельброт увидел удивительную фигуру, которую называют кардиоидой (кривой в форме сердца). Доказано, что множество Мандельброта является связным и самоподобным.

5.Статистически самоподобные.

Эти фракталы обладают меньшим уровнем самоподобия. В них присутствует какая – либо числовая или статистическая метрика, которая не изменяется в зависимости от масштаба. Сюда относятся случайные фракталы, например траектория броуновского движения, полет Леви, фрактальные пейзажи и броуновские деревья.

Объекты, обладающие фрактальными свойствами в природе.

В живой природе:

- Кораллы
- Морские звезды и ежи
- Морские раковины
- Цветы и растения (брокколи, капуста)
- Плоды (ананас)
- Кроны деревьев и листья растений
- Кровеносная система и бронхи людей и животных

В неживой природе:

- Границы географических объектов (стран, областей, городов)

Береговые линии

- Горные хребты
- Снежинки
- Облака
- Молнии
- Образующиеся на стеклах узоры
- Кристаллы
- Сталактиты, сталагмиты, геликтиты.

Практическое применение фракталов.

Картография.

При измерении протяженности береговой линии очевидно, что чем меньше единичный отрезок, выбранный для измерения длины ломанной, проведенной вдоль береговой линии, тем ее длина будет точнее соответствовать длине береговой линии. Здравый смысл подсказывает, что эти значения сходятся к некоторому конечному числу, которое и будет истинной длиной побережья или границы. Однако, английский ученый Льюис Ричардсон показал, что результат измерений будет бесконечно возрастать по мере уменьшения единицы измерения и увеличения масштаба карты. Этот удивительный факт известен под названием « эффект Ричардсона»

На примере этой задачи Мандельброт предложил использовать новый подход к измерениям. Поскольку береговая линия близка к фрактальной кривой, значит к ней можно применить характеризующий параметр – так называемую фрактальную размерность.

Что такое обычная размерность – понятно любому. Если размерность равна единице, мы получаем прямую, если два – плоскую фигуру, три – объём. Однако такое понимание в математике не срабатывает с фрактальными кривыми, где этот параметр имеет дробное значение. Фрактальную размерность в математике условно можно рассматривать как «неровность». Чем выше неровность кривой , тем больше ее фрактальная размерность.

Физика

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии

Медицина

На данное время фракталы находят и вероятно будут находить применение в медицине. Сам по себе человеческий организм состоит из множества фракталоподобных структур: кровеносная и нервная системы, мышцы, бронхи и т.д. Учёные, изучая сосудистую систему выяснили, что её участки можно представить в виде фракталов. Они выяснили, что здоровые кровеносные сети и раковые опухоли имеют разную фрактальную структуру. Это может помочь при выявлении раковых опухолей на ранней стадии. Также фракталы могут использоваться (пока на стадии успешных экспериментов) в обработке медицинских рентгеновских изображений. Рентгеновские снимки обработанные с помощью фрактальных алгоритмов дают более качественную картинку а соответственно и более качественную диагностику. В недалеком будущем благодаря изучению фракталов и хаоса ученые, возможно, получат более тонкие методы анализа различных нарушений функций организма при старении, заболеваниях и употреблении токсичных лекарственных препаратов.

Биология

Фрактальные формы обнаруживаются и в организации живых организмов, как одноклеточных так и многоклеточных. Фрактальная организация организма уже заметна на молекулярном уровне, ДНК, и во всех других уровнях организации: на клеточном, тканевом, органном, организменном. Особенно сильно заметна фрактальная структура: у животных – это системы органов; у растений – построение соцветий, разветвление главной оси – стебля.

Компьютерная графика

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее. Используемый принцип очень прост и состоит в том, чтобы разделять более крупную геометрическую фигуру на мелкие элементы, а те, в свою очередь, делить на аналогичные фигуры меньшего размера. Поэтому применять фрактальные изображения можно в самых разных сферах, начиная от создания обычных текстур и фоновых изображений и заканчивая фантастическими ландшафтами для компьютерных игр или книжных иллюстраций. Создаются подобные фрактальные шедевры путем математических расчетов, изображение строится исключительно на основе уравнений.

Телекоммуникация

Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном, который тогда жил в центре Бостона, где была запрещена установка внешних антенн на здания. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, затем присоединил к приёмнику. Оказалось, что такая антенна работает не хуже обычной. И, хотя физические принципы работы такой антенны не изучены до сих пор, это не помешало Коэну основать собственную компанию и наладить их серийный выпуск.

Музыка

Фрактальная музыка объединяет искусство и науку. Сейчас фрактальная музыка реально существует, развивается, а не является областью игры воображения. В музыке приложение элементов фрактальной геометрии используют в трёх областях: композиция, синтез звука, аналитические исследования. В сочинении («Горный фрактал») Нельсон применил рекурсивное12 разделение времени, высоты и амплитуды на основе фрактального алгоритма. Он интегрировал фрактальную технику в интерактивный перформанс и композицию. Для создания формальной структуры в сочинении Летняя песня» композитором была использована символическая грамматика замены, имеющая графическое описание в виде кривой Гилберта.

На рисунке Чёртова лестница или канторова лестница пример непрерывной монотонной функции, которая не является константой, но при этом имеет производную, равную нулю в почти всех точках). Она имеет «неравные ступени», почти везде вертикальную крутизну, и уходит в бесконечность.

Архитектура

Именно сегодня очень важно понимать, что простое копирование и заимствование решений из мировой архитектурной практики не сможет решить проблему создания гармоничной современной среды. Архитектура, начиная с фрагментов, деталей и заканчивая пространством города в целом – это система, обладающая фрактальными свойствами, которые нельзя не учитывать при реконструкции исторической среды и проектировании новых объектов внутри неё.

Искусство

Концепции фрактальности обязаны своим возникновением такие новые формы живописи и медийного искусства как фрактальный экспрессионизм (аналоговая фрактальная живопись), фрактальные монотипии, фрактальная абстракция, фрактальный реализм.

Дизайн

Особенно интересен фрактальный цветочный дизайн, который все больше находит свое отражение в одежде.

Литература

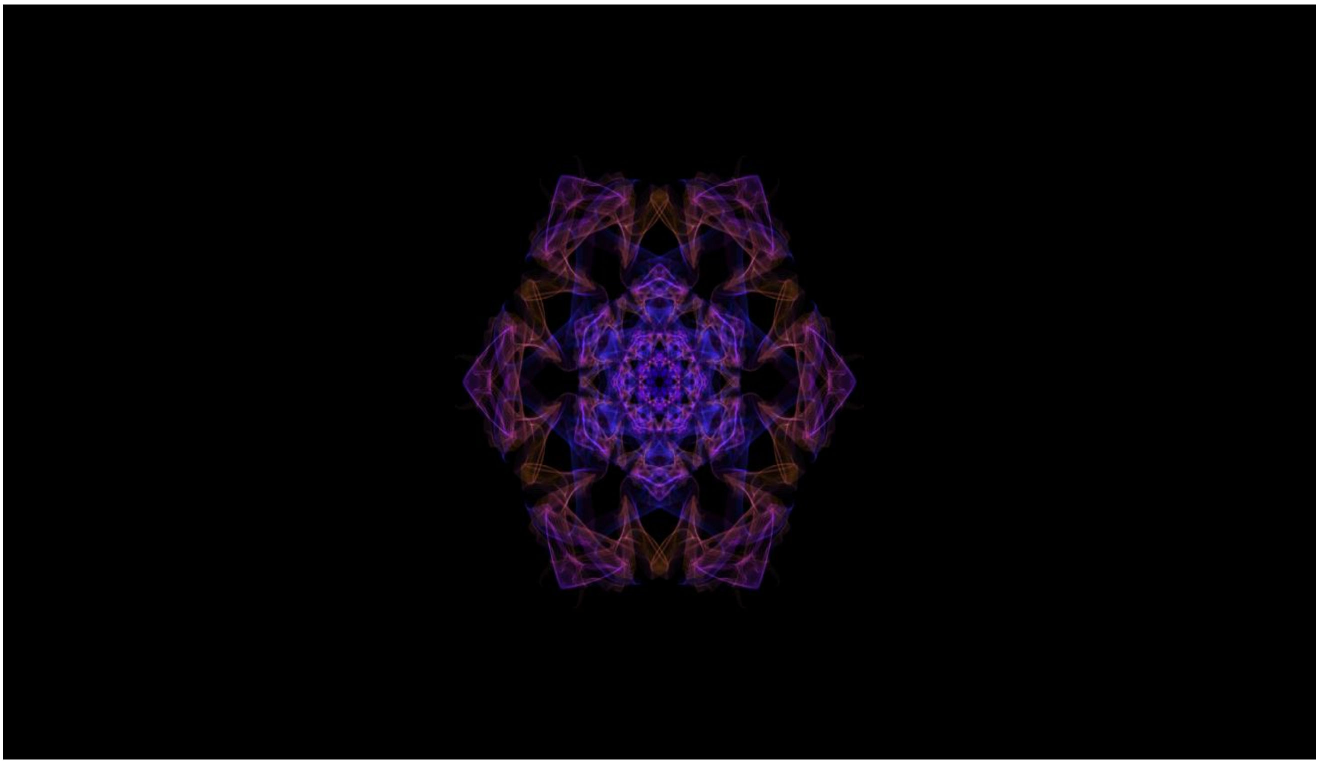
Оказывается, что литературные фрактальные произведения известны нам с детства. Среди таких произведений – например, стишок о попе и его собаке из русской народной поэзии, или стихотворение М.Яснова «Чучело-мяучело», а также стихотворение «Дом который построил Джек», в переводе С.Маршака. В текстуальных фракталах бесконечно повторяются элементы текста тождественные самим себе с любой итерации.

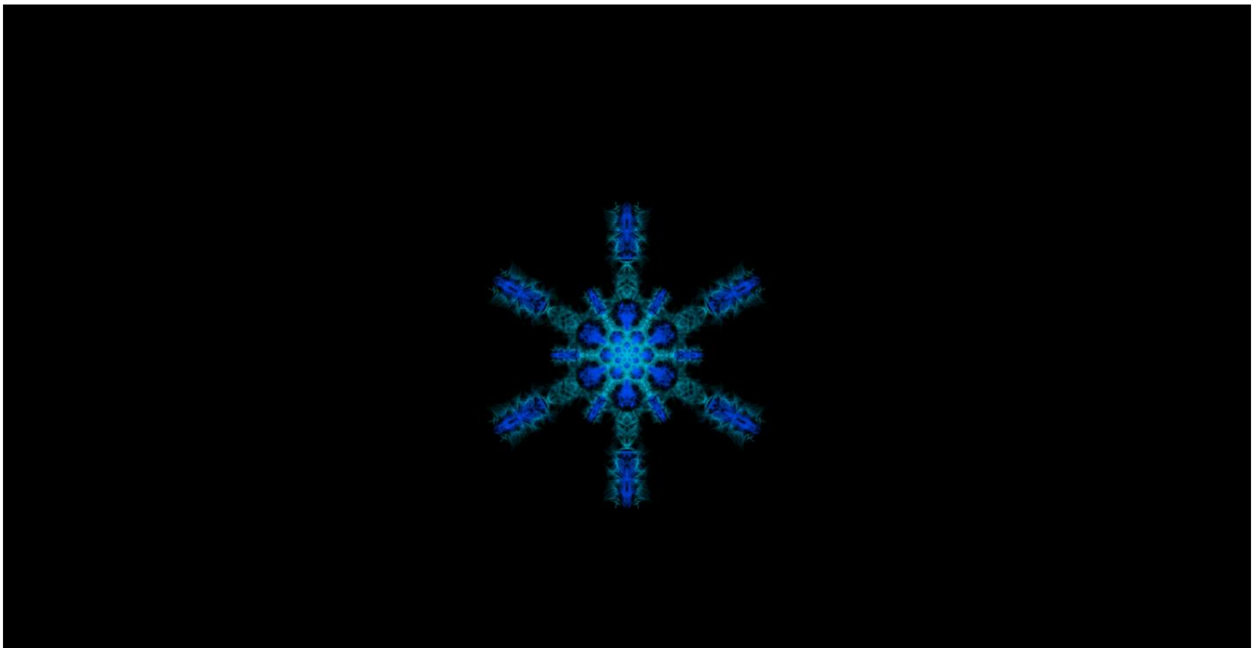
Экономика и финансы

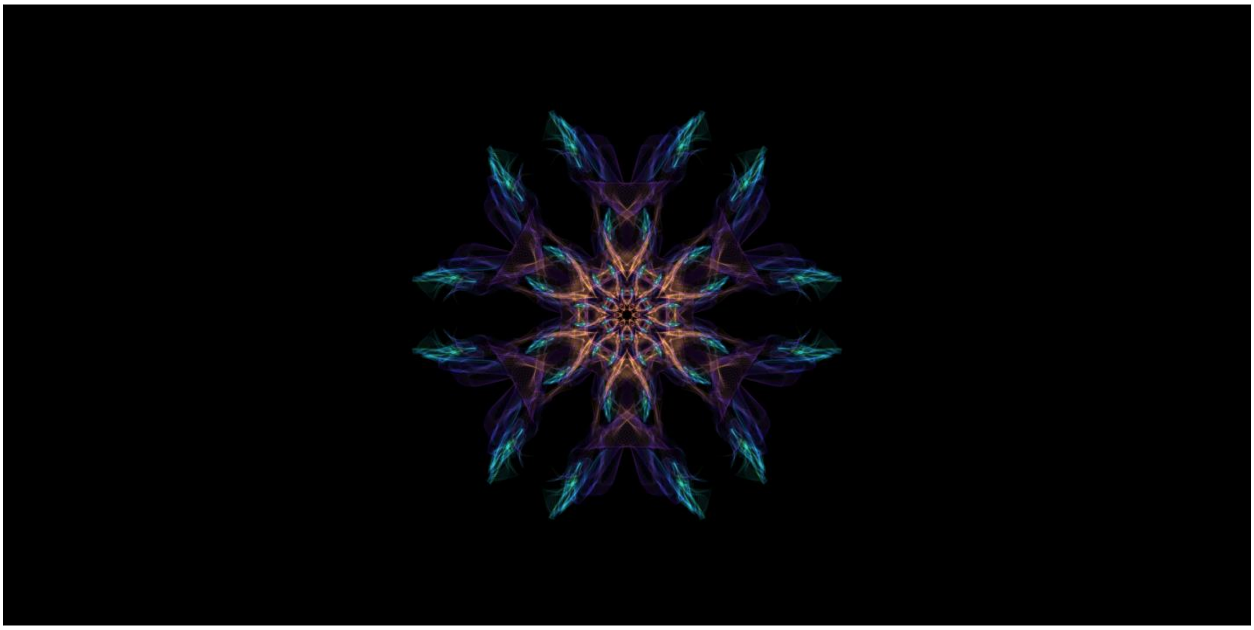
А. А. Алмазов в своей книге «Фрактальная теория. Как поменять взгляд на рынки» предложил способ использования фракталов при анализе биржевых котировок, в частности — на рынке Форекс.

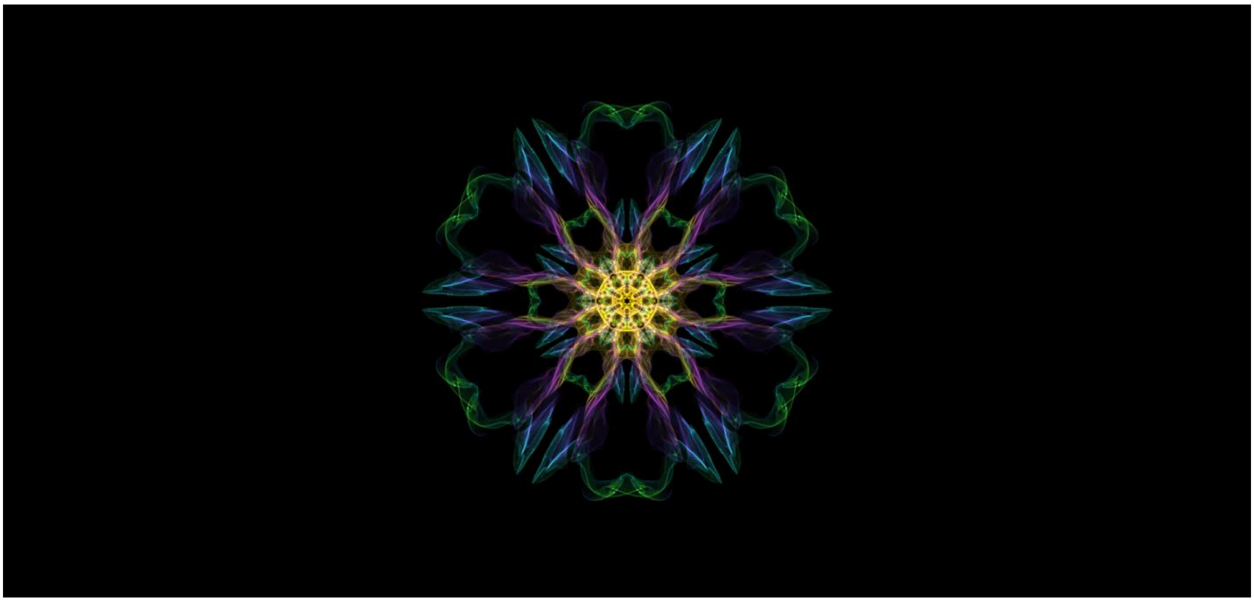
Bill Williams "Trading chaos. Applying expert techniques to maximize your profits" Фрактальная геометрия при анализе рынков.

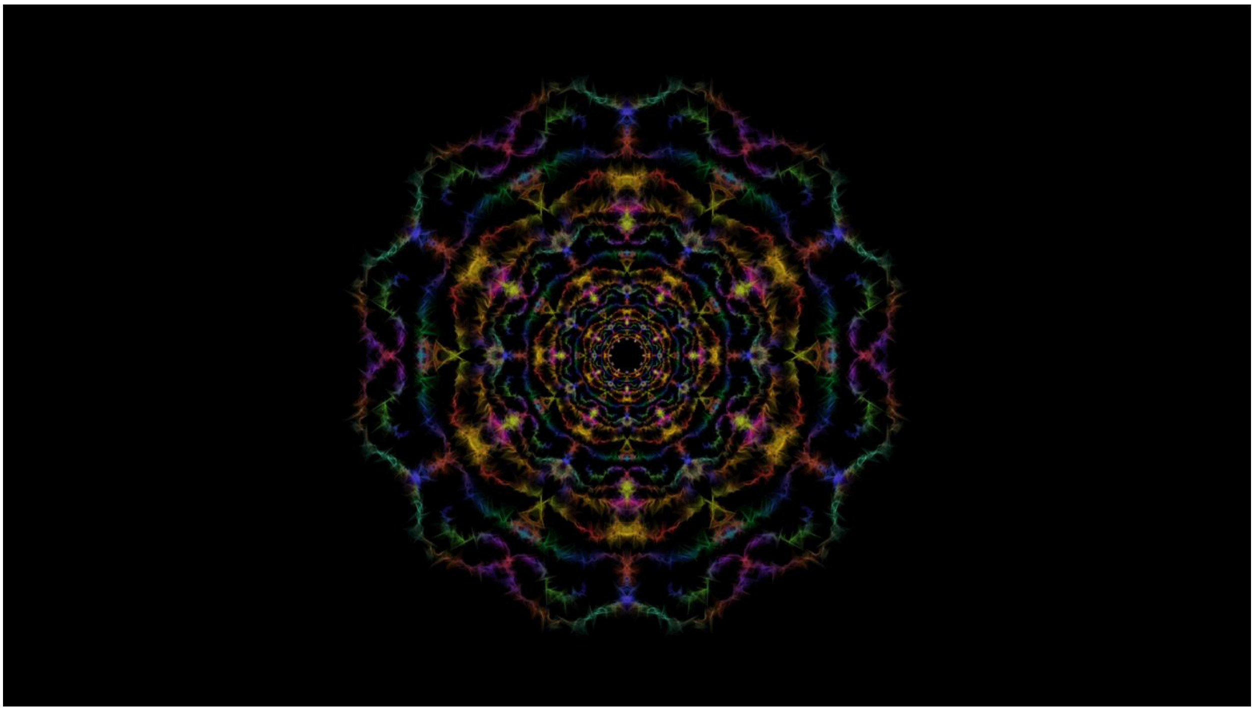
Практическая часть.

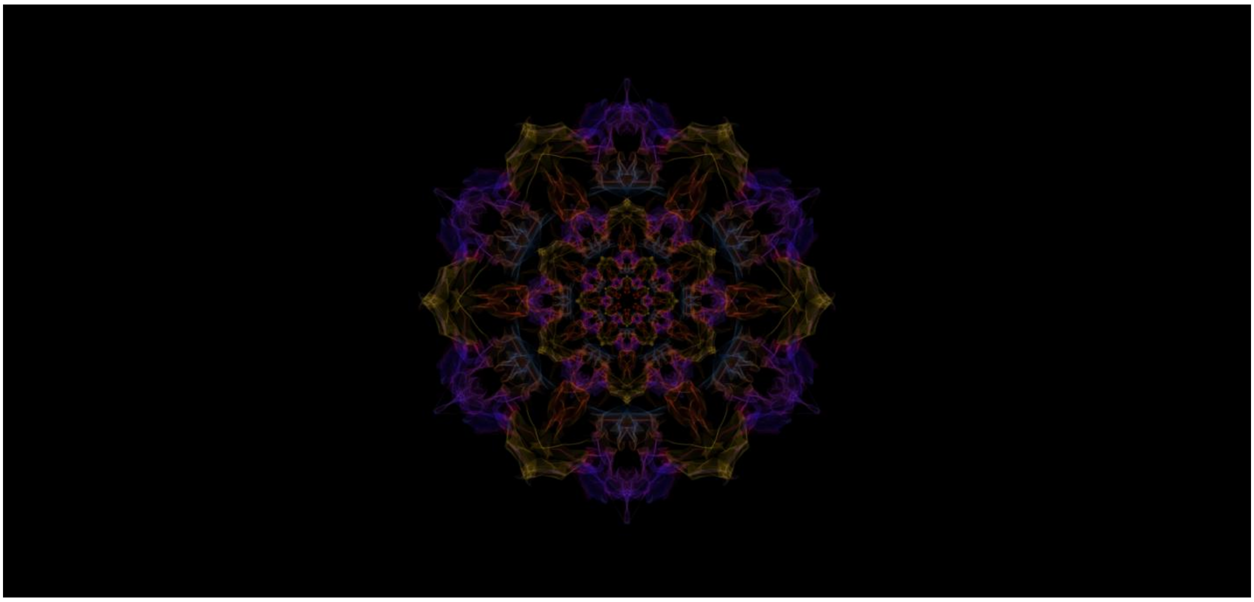












Заключение.

Утверждение, что «в природе существует множество фрактальных объектов» не совсем объективно. Когда мы говорим, что, например, граница, дерево или венозная сеть являются фракталами, в действительности имеется в виду, что для них существуют фрактальные модели достаточно высокой точности. В реальном мире не существует фракталов, как не существует прямых или окружностей.

Однако математические модели, описывающие реальность, помогают нам лучше понять ее. Подобно тому как теория относительности описывает орбиту Меркурия точнее, чем ньютоновская механика, фрактальная геометрия описывает форму некоторых объектов точнее, чем геометрия Евклида. Возможно, она точнее описывает и динамику реальных процессов.

Множество Мандельброта содержит бесконечно много деталей, и его рассмотрению в различных масштабах можно посвятить всю жизнь. Точно так же мы можем изучать и реальный мир, начав с молекул, затем перейдя к атомам, а от них – к нейтронам и другим субатомным частицам. Возможно ли, что в один прекрасный день мы достигнем предела?

Или же, подобно множеству Мандельброта, предела не существует и здесь? Этого никто не знает. Пока….

Список используемой литературы:

Мандельброт Б. Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. - М., НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009.

Божокин СВ., Паршин В.А. Фракталы и мультифракталы. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

Мария Изабель Бинимелис Басса Книга «Мир математики» 10 том «Новый взгляд на мир. Фрактальная геометрия», Москва-2014

Е.Федер Фракталы. - М., Мир, 1991.

Цицин Ф. А. Фрактальная вселенная // «Дельфис» — № 11(3) — 1997.

http://ru.science.wikia.com/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB

http://algolist.manual.ru/graphics/fracart.php

http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around/

Задание для первичного закрепления:

Построить фрактал «Кривая Минковского»